Seria 7

Zadanie 1

Podaj warunki na to, by nutacje naładowanego bąka symetrycznego w polu magnetycznym miały niewielką amplitudę. Wyznacz tę amplitudę i częstość nutacji w zależności od stałych ruchu, określonych przez wybrane przez Ciebie warunki początkowe.

Zadanie 2

Wyznacz analitycznie ruch bąka symetrycznego ciężkiego, zakręconego, z prędkością kątową ω_0, wokół osi symetrii ustawionej (niemal) idealnie pionowo (środek masy zajmował wtedy najwyższe położenie), ale niezbyt szybkiego: $\frac{1}{2}I_{||}\omega_0^2 < 2Mgd\frac{I_\perp}{I_{||}}$. Określenie „niemal idealnie" należy rozumieć tak, że całki ruchu mają wartości takie, jak w owym idealnym (niestabilnym) ruchu, ale obserwujemy ruch, gdy oś symetrii już odeszła od położenia pionowego.

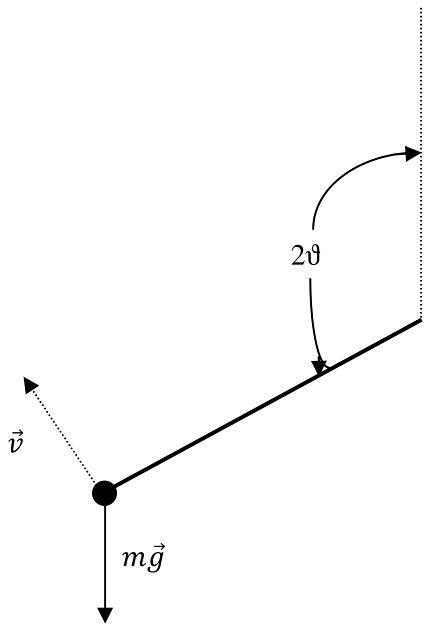
Zadanie 3

Zbadaj ruch bąka niesymetrycznego swobodnego, wirującego blisko osi największego momentu bezwładności. (Przyjmij tym razem $I_3>I_2>I_1$). Moment pędu wynosi $I_3\omega_0$, a energia jest **bliska** $\frac{1}{2}I_3{\omega_0}^2$. Wyznacz jawną zależność od czasu rzutów prędkości kątowej na osi bąka, rozwijając – ilekroć zdarzy się po temu okazja – względem małej różnicy $E - \frac{1}{2}I_3{\omega_0}^2$. Przyjmując oś $\vec{k}$ wzdłuż stałego wektora momentu pędu wyznacz (też w pierwszym przybliżeniu) zależność kątów Eulera od czasu.

Zadanie 4

Dla bąka niesymetrycznego badanego na ćwiczeniach, znaleźliśmy charakterystyczną zależność czasową $\cos\vartheta = \tanh\left(\sqrt{\frac{(I_1-I_3)(I_3-I_2)}{I_1I_2}}\,\omega_0 t\right)$ opisującą wędrówkę trzeciej osi bryły od położenia przeciwnego do kierunku momentu pędu, do położenia równoległego ($\vec{J} = J\vec{k}$).

Wyznacz ruch wahadła matematycznego o energii dokładnie równej wartości energii potencjalnej w położeniu najwyższym. Jest to przypadek graniczny pomiędzy ruchem oscylacyjnym, a rotacyjnym wahadła. W celu dostrzeżenia zupełnego podobieństwa ruchu wahadła i ruchu trzeciej osi badanej bryły, położenie wahadła opisuj kątem ϑ będącym połową kąta, jaki mu pozostał do przebycia. W czasie całego ruchu kąt maleje od 180° do 0°, a jego cosinus rośnie od -1 do +1.



Zadanie 5

Infinitezymalna macierz Lorentza jest symetryczna, można ją zdiagonalizować. Znajdź macierz ortogonalną M i wartości własne λ_1 i λ_2:

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} M^{-1}$$

Zauważ, że mnożenie dowolnej liczby macierzy w powyższym przedstawieniu, sprowadza się do mnożenia macierzy diagonalnych, czyli do mnożenie wartości własnych. Pozwala to łatwo wykonań przejście graniczne:

$$\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & r/n \\ r/n & 1 \end{pmatrix}^n$$

bez odwoływania się do rozwinięcia w szereg funkcji o argumencie macierzowym. Znajdź ostateczny rezultat.